Государственное образовательное учреждение среднего
профессионального образования
Губернский колледж города Похвистнево

Элементы теории множеств и теории графов

Сборник задач и упражнений с решениями по разделу математики "Дискретная математика"

Рассмотрено и одобрено ПЦК математических и
естественнонаучных дисциплин в качестве учебного пособия
для студентов среднего профессионального образования

2011

1. Элементы теории множеств

1.1 Теоретико-множественные операции

По определению Г. Кантора, основоположника теории множеств, множество есть любое собрание определенных и различимых между собой объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое нами как единое целое. Между отдельными объектами и множествами существует отношение принадлежности. Если предмет x принадлежит множеству A, то это записывают в виде $x \in A$, если не принадлежит множеству A, то пишут $x \notin A$.

Для обозначение множества служит пара фигурных скобок {….}, внутри которых перечисляются элементы множества.

Существует три способа задания множества: *перечисление описание, порождающие процедуры*. Во втором случае элементы множества определяются по заданному закону (правилу). Например, A={x|(утверждение об x)}, которое читается как: “A есть множество таких элементов x, для которых (утверждение об x) верно”. Или можно записывать и так: $A=\{x|P(x)\}$, которое читается как “A есть множество таких элементов x, которые обладают свойством P”.

Порождающей процедурой называется способ получения элементов множества из уже полученных элементов. Например, множество A всех целых чисел, являющихся степенями числа 2 может быть представлено порождающей процедурой, заданной двумя правилами, называемыми *рекурсивными* или *индуктивными:*

а) $1 \in A$; б) если $x \in A$, то $2 \cdot x \in A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается символом $\varnothing$.

Между различными множествами может существовать отношение включения, как отношение “быть подмножеством”. Множество A является подмножеством B, если любой элемент множества A принадлежит множеству B. Это определение записывают в виде $A \subset B$, где символ $\subset$ означает включение. Для подмножеств справедливо свойство рефлексивности ($A \subseteq A$) и транзитивности [($A \subseteq B$ и $B \subseteq C) \to A \supseteq C$]. Кроме того, для любого множества A справедливо $\varnothing \supseteq A$.

Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Если A – конечное n-элементное множество, тогда имеется ровно 2^n различных подмножеств, составленное из элементов множества A, включая несобственные подмножества $\varnothing$ и A.

Множество всех подмножеств данного множества A называется степенью множества A или *булеаном* $\beta(A)$.

Если при некотором рассмотрении участвуют только подмножества некоторого фиксированного множества I, то это самое большое множество называется универсальным (полным) множеством и графически обозначается в виде точек прямоугольника, отдельные области которого обозначают различные подмножества I. Такое изображение множеств называется диаграммой Эйлера – Венна.

Основные операции над множествами:

- Объединение: $A\cup B=\{x|x\in A$ или $x\in B\}$;
- Пересечение: $A\cap B=\{x|x\in A$ и $x\in B\}$;
- Разность: $A\backslash B=\{x|x\in A$ и $x\notin B\}$;
- Симметрическая разность: $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$;
- Дополнение: $\overline{A}=I\backslash A=\{x|x\in I$ и $x\notin A\}$.

Система множеств $X=\{X_1, X_2,\ldots X_n\}$ называется *разбиением множества* A, если она удовлетворяет следующим условиям:

- $X_i\in X$ и $X\subset A$;
- $X_i\in X$, $X_j\in X$ и $X_i\cap X_j=\varnothing$;
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i = A$.

Свойства операций пересечения и объединения являются двойственными при замене знаков $\cup$ на $\cap$, $\varnothing$ на I и наоборот, поэтому основные тождества и законы алгебры множеств можно записать следующим образом:

1. $A\cup\varnothing=A$, $\quad A\cap I=A$;
2. $A\cup\overline{A}=I$, $\quad A\cap\overline{A}=\varnothing$;
3. $A\cup I=I$, $\quad A\cap\varnothing=\varnothing$;
4. $\overline{\varnothing}=I$, $\quad \overline{I}=\varnothing$;
5. $A\cup A=A$, $\quad A\cap A=A$;
6. $\overline{\overline{A}}=A$.
7. $A\cup B=B\cup A$, $\quad A\cap B=B\cap A$;
8. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;
9. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$, $\quad (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.
10. $A\cup(A\cap B)=A$ $\quad A\cap(A\cup B)=A$
11. $\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots A_n}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\ldots\overline{A}_n$ $\quad \overline{A_1\cap A_2\cap\ldots A_n}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\ldots\overline{A}_n$

Пример 1. Задать различными способами множество A всех четных чисел 2, 4, 6, …., не превышающих 1000.

Решение. 1. Перечислением: $A=\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 998, 1000\}$;

1. Описанием: $A=\{x|x\in N$ и $x/2\in N, N\le 1000\}$; (N – множество натуральных чисел 1, 2, 3, ….)
2. Порождающей процедурой: а) $2\in A$; б) если $x\in A$, то $(x+2)\in A$; в) $x\le 1000$.

Пример 2. Верно ли, что: 1). $\{\{1,2\}, \{2,3\}\}=\{1,2,3\}$? 2). $\{\{1,2\}\}=\{1,2\}$?

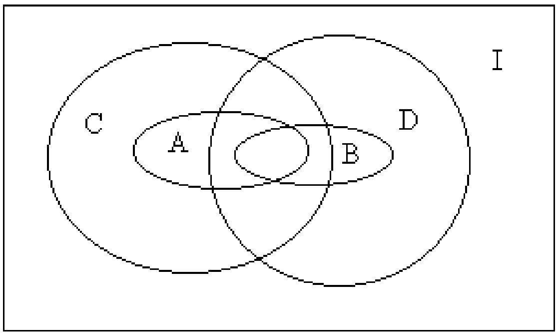
Решение. 1). Нет, так как элементами первого множества являются подмножества {1,2} и {2,3}, а второго – элементы 1,2,3.
2). Нет, так как первое множество одноэлементное, состоящее из одного элемента - подмножества, а второе имеет два элемента 1 и 2.

Пример 3. Перечислить элементы следующих множеств:
1). $A=\{a|a\subseteq B, B=\{1,2,3\}\}$;
2). $A=\{a|a\in B, B=\{1,2,3\}\}$.
Решение. 1). Так как $a\subseteq B$, а B – трехэлементное множество, то имеется $2^3=8$ подмножеств: $A=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \varnothing\}$.
2). Так как $a\in B$, то $A=B=\{1,2,3\}$.

Пример 4. Доказать, используя тождества алгебры множеств, что $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$.
Решение. Используя тождества алгебры множеств, получаем
$$A\cup(B\setminus A)=A\cup(B\cap\overline{A})=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})=(A\cup B)\cap I=A\cup B.$$

Пример 5. Упростить выражение $(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.
Решение. Используя законы и тождества алгебры множеств, получаем:
$$(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup\overline{B}\cup\overline{C}=[(A\cup\overline{A})\cap B\cap C]\cup\overline{B}\cup\overline{C}=$$
$$I\cap B\cap C\cup\overline{B}\cup\overline{C}=(B\cap C)\cup(\overline{B\cap C})=I$$

Пример 6. Построить диаграммы Венна для множеств A, B, C, $D\subset I$, если $A\cup B\subset C\cup D$, $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap D\neq\varnothing$.
Решение. Одно из возможных решение может быть представлено следующей диаграммой:



Пример 7. Опрос 100 студентов, изучающих иностранные языки, показал: английский язык изучают 29 студентов, немецкий –30, французский –9, только французский - 1, английский и немецкий – 10, немецкий и французский – 4, все три языка – 3 студента. Сколько студентов не изучают ни одного языка? Сколько студентов изучают только немецкий язык? При решении использовать диаграммы Венна.
Решение. Введем обозначения: I – множество всех опрошенных студентов; A – множество студентов, изучающих английский язык; H –

множество студентов, изучающих немецкий язык; Ф – множество студентов, изучающих французский язык (См. диаграмму Эйлера-Венна на рис. 1.1)

По условию задачи очевидно, что $A \cap Ф \cap H$=3, тогда $(H \cap Ф) \setminus (A \cap Ф \cap H)$=4-3=1; $(A \cap H) = (A \cap Ф \cap H)$ = 10-3=7. В таком случае только немецкий язык изучают 30-7-3-1=19 студентов.

Из условия задачи также слежует, что $(A \cap Ф) \setminus (A \cap Ф \cap H)$ = 9-1-1-3=4, а поэтому только английский язык изучают 29-4-3-7=15 студентов. Тогда число студентов, не изучающих ни одного языка, будет равно $I \setminus (A \cup Ф \cup H)$ = 100-(1+1+3+4+7+15+19)=50 студентов.

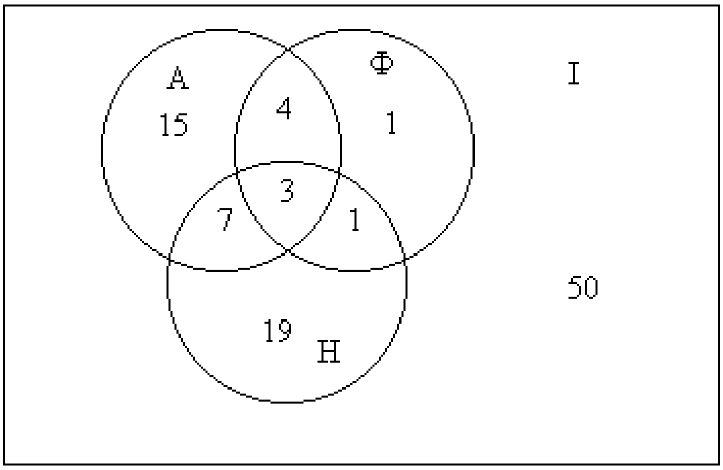


Рис. 1.1

Пример 8. Доказать аналитически: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Решение. Введем обозначения: $D = (A \cap B) \cup C$; $E = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

а). Пусть $x \ni D$, тогда имеет место либо $x \in A \cap B$, либо $x \in C$. Если $x \in A \cap B$, тогда $x \in A$ и $x \in B$ и в таком случае $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$ или, что тоже самое, $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, т.е. $x \in E$. Если $x \in C$, тогда можно записать $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$ одновременно. Откуда, очевидно, и в этом случае $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, т.е. $x \in E$.

Итак, если $x \ni D$, то $x \in E$. Следовательно, $D \subseteq E$.

б). Пусть $x \in E$. Тогда $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$. Если $x \in A \cup C$, то либо $x \in A$, либо $x \in C$. Но если $x \in C$, то (см. п.а) $x \in D$. Если же $x \notin C$, тогда $x \in B$. Из последнего следует, что $x \in A$ и $x \in B$, т.е. $x \in A \cap B$, или, что тоже самое, $x \in (A \cap B) \cup C$, т.е. $x \ni D$.

Итак, если $x \in E$ то $x \ni D$. Следовательно, $E \subseteq D$.

Из пп. а и б следует, что $D \subseteq E$ и $E \subseteq D$. Следовательно, D=E, т.е. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Тождество доказано.

Пример 9. Доказать, что для произвольных множеств A и B имеет место соотношение $A \subseteq B = \overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Решение. Для доказательства используем метод от противного, т.е. предположим, что $A \subseteq B$ и $\overline{B} \not\subset \overline{A}$. Тогда

Из $A \subseteq B \Rightarrow$ если $a \in A$, то $a \in B$. (1)

С другой стороны, из $\overline{B} \not\subset \overline{A} \Rightarrow$ существует такой элемент a, что $a \in \overline{B}$ и $a \notin \overline{A} \Rightarrow a \in \overline{B}$ и $a \in A$. (2)

Но с учетом (1) и (2)

$a \in A$ и $a \in \overline{B} \Rightarrow a \in B$ и $a \in \overline{B} \Rightarrow a \in (B \cap \overline{B}) = \varnothing$, т.е. получили противоречие.

Следовательно, предположение $\overline{B} \not\subset \overline{A}$ ложно и поэтому $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, т.е. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Аналогично можно показать, что $\overline{B} \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \subseteq B$ и, значит, $A \subseteq B = \overline{B} \subseteq \overline{A}$, что и требовалось доказать.

Задачи для самостоятельного решения.

№ 1.1. Пусть A={{1,2,3}, {1,3}, 1, 2}. Верно ли, что $\{1, 2\} \in A$?
$\{1, 2\} \subset A$?

№ 1.2. Перечислить элементы множества

$$A = \{x \mid x = \frac{n}{n^2 + n + 3}, \quad n=1, 2,\dots\}.$$

№1.3. Перечислить элементы следующих множеств:

$A = \{x \mid x \in \{\{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}\}\}$;

$B = \{x \mid x \subset \{a,b,c,d\}\}$;

$C = \{x \mid x \subseteq \{a,b,c,d\}\}$.

№ 1.4. Перечислите все элементы множества

$P \subseteq A = \{\{1, 2\}, \{3\}, 1\}$.

№1.5. Пусть A – произвольное множество. Что представляют собой следующие множества: $A \cap \varnothing$? $A \cup \varnothing$? $A \setminus \varnothing$? $A \setminus A$?

№ 1.6. Множество A состоит из натуральных чисел, делящихся на 4, множество B – из натуральных чисел, делящихся на 10, множество C – из натуральных чисел, делящихся на 75. Из каких чисел состоит множество $A \cap B \cap C$?

№ 1.7. Даны произвольные множества A, B, C такие, что:

1. $A \subset B$ и $A \subset C$;
2. $A \subset C$ и $B \subset C$.

Чему равно $A \cap B \cap C$? $A \cup B \cup C$?

№ 1.8. Даны произвольные множества A, B и C такие, что $A \subset B$, $B \subset C$. Чему равно $A \cap B \cap C$? $A \cup B \cup C$? $A \setminus C$? $C \setminus A$?

№ 1.9. Даны множества:

а). A={h,o,t} и B={t,o,o,t,h};

б). A={r,e,s,t} и B={s,t,r,e,e,t}.

Верно ли, что $A \subset B$? $B \subset A$? $A = B$?

№ 1.10. Известно, что а). $A \cap B \cap C = A$; б). $A \cup B \cup C = A$. Каковы следствия из этих уравнений?

№ 1.11. Задано, что $S=\{a_1, a_2, a_3\}$, причем известно, что $A \subset S$, $A=\{a_1, a_2\}$; $B \subset S$, $B=\{a_2, a_3\}$; $C \subset S$; $C=\{a_2\}$. Найти элементы следующих множеств: $A \cap A$; $A \cap B$; $B \cap A$; $(A \cap B) \cup (B \cap C)$.

№ 1.12. Пусть I={1,2,3,4,5}, X={1,5}, Y={1,2,4}, Z={2,5}.
Найти множества:

а) $X \cap \overline{Y}$; б) $(X \cap Z) \cup \overline{Y}$; в) $X \cup (Y \cap Z)$; г) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;

д) $\overline{X \cup Y}$; е) $\overline{X} \cap \overline{Y}$; ж) $\overline{X \cap Y}$; з) $(X \cup Y) \cup Z$; и) $X \cup (Y \cup Z)$;

к) $X \setminus Z$; л) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.

№ 1.13. Пусть I={a,b,c,d,e,f}, A={a,b,c}, B={f,e,c,a}, C={d,e,f}.
Найти множества:

а) $A \setminus C$; б) $B \setminus C$; в) $C \setminus B$; г) $A \setminus B$; д) $\overline{A} \cup B$; е) $B \cap \overline{A}$; ж) $A \cap C$;

з) $C \cap A$; и) $C \Delta A$.

№ 1.14. Даны два произвольных множества A и B такие, что $A \cap B = \varnothing$. Что представляют собой множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$?

№ 1.15. Даны два произвольных множества C и D такие, что $C \cap \overline{D} = \varnothing$. Что можно сказать о множествах $C \cap D$ и $C \cup D$?

№ 1.16. Дано произвольное множество X. Найти множества: а) $X \cap \overline{X}$; б) $X \cup \overline{X}$; в) $X \setminus \overline{X}$; г) $\overline{X} \setminus X$.

№ 1.17. Какие из следующих утверждений справедливы:

а) $0 \in \varnothing$; б) $\varnothing = \{0\}$; в) $|\{\varnothing\}| = 1$; г) $\{\{\varnothing\}\} \in \{\{\{\varnothing\}\}\}$; д) $|\{\{\varnothing\}\}| = 2$?

№ 1.18. Сформулируйте следующее утверждение на языке множеств: даны множества A, B и C; определить множество, включающее в себя только два из этих множеств.

№ 1.19. Решите предыдущую задачу при условии, что множества A, B и C взаимно не пересекаются.

№ 1.20. Даны множества V, W, Y, X и Z. Определить множество, включающее по крайней мере два из множеств V, W, X и Y и не включающее Z.

№ 1.21. Упростить выражения:

1) $\overline{A\cap\overline{\overline{B}}}\cup B$;
2) $\overline{\overline{\overline{(A\cup B)}\cap(\overline{A}\cup\overline{B})}\cup(A\cup B)}$;
3) $\overline{\overline{(A\cup\overline{B})}\cup\overline{(\overline{A}\cup B)}\cap(A\cup B)}$;
4) $\overline{[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)\cup(B\cap D)]\cap\overline{(A\cap B\cap C\cap D\cup I)}}$;
5) $(A\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap B)\cup\overline{B}\cup$ $(A\cap\overline{B}\cap C\cap\overline{D})$;
6) $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(A\cap B\cap C\cap D)\cup(A\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})$;
7) $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap\overline{D})\cup(A\cap B\cap C\cap D)\cup$
$\cup(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup$
$\cup(A\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(A\cap\overline{B}\cap C\cap\overline{D})$;
8) $(\overline{A\setminus B}\setminus B\cap C)\setminus\overline{\overline{C}\cup D}$;
9) $(A\cup A\cap\overline{B}\cup\overline{A}\cap C)\cap\overline{A}\cap B\setminus C$;
10) $\overline{\overline{A}\setminus\overline{B\cup C}}\setminus\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cup A\cap B\cap C$;
11) $\overline{A}\cup A\cup B\cup\overline{\overline{B}\cup\overline{C}}\setminus A$;
12) $\overline{A}\setminus\overline{B\cap C}\setminus A\cap\overline{B}\cap C\cup A\cup B\cap C$;
13) $\overline{A}\cup(A\setminus\overline{B})\cup(\overline{A}\setminus B)$;
14) $A\cup B\cap\overline{\overline{B}\cup\overline{C}}\setminus\overline{B}$;
15) $(A\cup\overline{A}\cap B\cup\overline{A}\cap C)\cap\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$;
16) $(A\cup B\cap C)\setminus(\overline{B}\cup\overline{C}\cup\grave{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup\overline{(A\cup B\cup C)}$;
17) $(A\cup(B\setminus A)\cup\overline{A}\cap C)\cap\overline{A}\cap C\setminus C$.

№ 1.22. Доказать тождества, используя законы алгебры множеств:

1) $\overline{\overline{(\overline{A}\cup B)}\cup(A\cup\overline{B})}=B\setminus A$;
2) $A\setminus[(A\cap B)\cup(A\setminus B)]=\varnothing$;
3) $(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap D)=C$;
4) $(A\cap B\cap D)\cup(A\cap B\cap C\cap D\cap E)\cup(A\cap D\cap\overline{A})=A\cap B\cap D$;

5) $[(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(\overline{A}\cap D\cap E)]\cap\overline{[(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{D}\cap\overline{E})\cup(\overline{A}\cap B\cap E)]}=$ $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{D}\cap E)$.

№ 1.23. Для произвольных множеств A, B, C, D $\subset$ I построить диаграммы Эйлера-Венна при условии:

1) $A, B, C\subset D$; $\quad A\cap B\cap C\neq\varnothing$;
2) $C\subset A\cap B$; $\quad D\subset B$; $\quad C\cap D\neq\varnothing$;
3) $A\subset B$; $\quad C\subset D$; $\quad A\cap D=\varnothing$; $\quad B\cap C=\varnothing$;
4) $C\subset A\cup B$; $\quad (A\setminus B)\cap C\neq\varnothing$; $\quad (B\setminus A)\cap C\neq\varnothing$.

№1.24. С помощью диаграмм Эйлера-Венна установить справедливость каждого из следующих утверждений относительно произвольных множеств A, B, C $\subset$ I:

1) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$;
2) если $A\cap B\subset\overline{C}$ и $A\cup C\subset B$, то $A\cap C=\varnothing$;
3) если $A\subset\overline{B\cup C}$, и $B\subset\overline{A\cup C}$, то $B\neq\varnothing$;
4) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

№ 1.25. показать с помощью диаграмм Эйлера Венна, какое из двух множеств $(\overline{A}\cap\overline{B})$ и $(A\cup B)$ является подмножеством другого.

№ 1.26. Как можно представить следующие множества, используя диаграммы Эйлера-Венна:

{A, {A}}, {{a}, {b}}, {X, Y, Z},

где X={x|x=1 или (x-2)∈X},
Y={x|x=3 или (x-3)∈Y},
Z={x|x=2 или (x-2)∈Z}?

№ 1.27. Пусть даны множества A, B и C. $C\subseteq B$. Доказать, что:

а) $A\cap C\subseteq A\cap B$; б) $A\cup C\subseteq A\cup B$; в) $A\setminus B\subseteq A\setminus C$; г) $C\setminus A\subseteq B\setminus A$;
д) $\overline{B}\setminus A\subseteq\overline{C}\setminus A$.

№ 1.28. Доказать, что если $A\subseteq B$, то $P(A)\subseteq P(B)$.

№ 1.29. Доказать, что $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

Решите задачи № 1.30 ÷1.39 с использованием диаграммы Эйлера-Венна.

№ 1.30. В студенческом потоке 37 человек хорошо знают математику, а 25 человек – электронику, и 19 человек хорошо знают и математику и электронику. Если в потоке каждый из студентов знает хотя бы один из этих предметов, то сколько студентов в потоке?

№ 1.31. Из 250 студентов 151 изучают немецкий язык, 136 – французский язык, 27 – итальянский, 63 – французский и немецкий, 7 – итальянский и французский, 11 – немецкий и итальянский, 4 – все три языка.

а) Сколько студентов изучают немецкий или французский язык?
б) Сколько студентов изучают только итальянский язык?
в) Сколько студентов изучают немецкий и французский язык, но не итальянский?
г) Сколько студентов не изучают ни одного языка?
д) Сколько студентов изучают хотя два иностранных языка?

№ 1.32. В отчете о количестве студентов, изучающих иностранные языки, сообщалось, что из 100 студентов все три языка изучают 5 человек, немецкий и английский – 10 человек, французский и английский – 8 человек, немецкий и французский – 20 человек, английский – 30, немецкий – 23, французский – 50. Инспектор, представивший этот отчет, был отстранен от работы. Почему?

№ 1.33 Каждый из 500 студентов обязан посещать хотя бы один из трех спецкурсов: по математике, физике, астрономии. Три спецкурса посещают 10 студентов, по математике и астрономии –25 студентов, спецкурс только по физике – 80 студентов. Известно также, что спецкурс по математике посещают 345 студентов, по физике – 145, по астрономии – 100 студентов. Сколько студентов посещают спецкурс только по астрономии? Сколько студентов посещают два спецкурса?

№ 1.34. Экзамен по математике содержал три задачи: по алгебре, геометрии и тригонометрии. Из 800 абитуриентов задачу по алгебре решили 250 человек; по алгебре или геометрии – 660 человек; по две задачи решили 400 человек, из них две задачи по алгебре и и геометрии решили 150 человек, по алгебре и тригонометрии – 50 человек; ни один абитуриент не решил все задачи; 20 абитуриентов не решили ни одной задачи; только по тригонометрии задачи решили 120 человек. Сколько абитуриентов решили только одну задачу? Сколько абитуриентов решили задачи по тригонометрии?

№ 1.35. На курсах иностранных языков учится 600 человек. Из них французский изучают 220 человек, английский – 270 человек. Слушатели, изучающие английский язык, не изучают немецкий язык; один французский язык изучают 100 человек, один немецкий язык изучают 180 человек. Сколько человек изучает по два иностранных языка? Сколько человек изучает один иностранный язык?

№ 1.36. На кафедре иностранных языков работают 18 преподавателей. Из них 12 преподают английский язык, 11 – немецкий язык, 9 – французский язык. 5 преподавателей преподают английский и немецкий языки, 4 – английский и французский, 3 – немецкий и французский. Сколько преподавателей преподают все три языка? Сколько преподавателей преподают только два языка?

№ 1.37. Группа студентов из 25 человек сдала экзаменационную сессию со следующими результатами: 2 человека получили только “отлично”; 3 человека получили отличные, хорошие и удовлетворительные оценки; 4 человека только “хорошо”; 3 человека только хорошие и удовлетворительные оценки. Число студентов, сдавших сессию только на “удовлетворительно”, равно числу студентов, сдавших сессию только на “хорошо” и “отлично”. Студентов, получивших только отличные и удовлетворительные оценки – нет. Удовлетворительные или хорошие оценки получили только 22 студента. Сколько студентов сдали сессию только на “удовлетворительно”?

№ 1.38. Преподаватели кафедры Прикладной математики преподают на трех факультетах: механическом, технологическом, экономическом. На технологическом факультете работает 22 преподавателя, на механическом – 23 преподавателя, на механическом и экономическом – 36 преподавателей. Только на технологическом факультете работают 10 преподавателей. 2 – на трех факультетах. 5 преподавателей работают только на механическом и экономическом факультетах. Число преподавателей, работающих только на механическом и технологическом факультетах, равно числу преподавателей, работающих на экономическом и технологическом факультетах. Сколько преподавателей работает на кафедре? Сколько преподавателей работает только на одном факультете?

№ 1.39. Экзамен по математике содержал три задачи: по алгебре, геометрии и тригонометрии. Из 750 абитуриентов задачу по алгебре решили 400 абитуриентов, по геометрии – 480, по тригонометрии – 420. Задачи по алгебре или геометрии решили 630 абитуриентов; по геометрии или тригонометрии – 600 абитуриентов; по алгебре или тригонометрии – 620 абитуриентов. 100 абитуриентов не решили ни одной задачи. Сколько абитуриентов решили все задачи? Сколько абитуриентов решили только одну задачу?

№ 1.40. Доказать аналитически, что для любых трех множеств A, B и C справедливы равенства:

а) $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$;

б) $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$;

в) $A\cup B = I$, если $A,\ B\subset I$ и $\overline{B}\subset A$;

г) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$, если $A,\ B\in I$;

д) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$;

е) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$;

ж) $A\subset C$, если $A\subset B$ и $B\subset C$;

з) $C\subset A$, если $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$.

1.2 Соответствия. Отображения. Отношения

Прямым произведением множеств A и B называют множество, обозначаемое $A\times B$ и состоящее из всех и только тех упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая – множеству B, т.е. $A\times B=\{(x,y)|x\in A,\ y\in B\}$. Прямое произведение дистрибутивно относительно объединения и пересечения.

Соответствием между множествами X и Y называется подмножество $G\subset X\times Y$. Если $(x,\ y)\in G$, то говорят, что y соответствует x при соответствии G. Множество $Пр_1G$ называется областью определения соответствия, множество $Пр_2G$ – областью значений соответствия. Если $Пр_2G=Y$, то соответствие называется сюръективным. Множество всех $y\in Y$, соответствующих элементу $x\in X$, называется образом x в Y при соответствии G. Множество всех x, которым соответствует y, называется прообразом y в X при соответствии G.

Соответствие называется функциональным (или однозначным), если образом любого элемента $Пр_1G$ является единственный элемент из $Пр_2G$. Функцией называется функциональное соответствие.

Если функция f устанавливает соответствие между множествами X и Y, то говорят, что функция f имеет тип $X\rightarrow Y$ и обозначается $f:X\rightarrow Y$.

Полностью определенная функция $f:X\rightarrow Y$ называется отображением X в Y. Образ X при отображении f обозначается $f(X)$. Если соответствие при этом сюръективно, т.е. каждый элемент Y имеет прообраз в X, то говорят, что имеет место отображение X на Y (сюръективное отображение).

Если $f: X\rightarrow Y$ и $A\subset X$, то $f\cap(A\times Y)$ есть функция, определенная на A со значениями в Y. Эту функцию называют сужением f на множество A и обозначают $f|A$ или f_A.

Пример 10. {(1,2), (2,2), (Иванов, Петров)} есть функция с областью определения {1, 2, Иванов} и областью значений {2, Петров}.

Пример 11. {(1,2), (1,3), (2,5)} не является функцией, т.к. различные элементы (1,2) и (1,3) имеют одинаковую первую координату.

Пример 12. Множество {(a,b), (c,b), (e,d), (k,m)} есть функция, а подмножество этого множества {(a,b), (e,d)} является сужением этой функции на множество {a,e}.

Отображение $R : X \to X$ представляет собой отображение множества X в самого себя и определяется парой (X, R), где $R \subseteq X^2$. В этом случае для обозначения данного отображения используется термин отношение и вводят специальную символику: yRx – y находится в отношении R к x.

Подмножество $R \subset A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ называется n-местным отношением между A_1, A_2, …..A_n. Если n=2, то R называется бинарным отношением.

Пример 13. Множество {(3,4), (4,6), (7,9), (4,12)} будучи множеством упорядоченных пар натуральных чисел, есть бинарное отношение на N, где N – множество натуральных чисел.

Отношение R называется ($R \subset A \times A = A^2$):

- *рефлексивным*, если для любого $a \in A$ имеет место $a R a$;
- *антирефлексивным*, если ни для какого $a \in A$ не выполняется $a R a$;
- *симметричным*, если для пары $(a, b) \in A^2$ из aRb следует bRa;
- *антисимметричным*, если из $a_i R a_j$ и $a_j R a_i$ следует, что $a_i = a_j$;
- *транзитивным*, если для любых a, b, c из aRb и bRc следует aRc.

Отношение R называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначается символом ≡.

Пример 14. Докажите, что отношение равенства «=» на любом множестве является отношением эквивалентности.

Решение. Действительно, для данного отношения выполняются свойства: рефлексивности (a=a); симметричности (a=в $\to$ в=a); транзитивности [(a=в и в=c)$\to$a=c].

Отношением предпорядка на множестве A называется отношение $R \subset A \times A$, если оно рефлексивно и транзитивно.

Отношением порядка называется отношение, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Отношением строгого порядка называется отношение, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Пример 15. Задано бинарное отношение R на множестве M={1, 2, 3, 4}. Является ли оно рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным? Найти область определения δ_R, область значений ρ_R, обратное отношение R^{-1}, пересечение и объединение отношений R и R^{-1}
R={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4).

Решение.

Отношение R, заданное на множестве M, называется рефлексивным, если для всякого x из этого множества xRx истинно. <u>Заданное отношение не является рефлексивным</u>, так как нет пар (2,2) и (3,3).

Отношение R, заданное на множестве M называется симметричным, если на этом множестве из xRy следует yRx. <u>Заданное отношение не является симметричным</u>, т.к., например, пара $(1,2)\in R$, а $(2,1)\notin R$.

Отношение R, заданное на множестве M называется антисимметричным, если на этом множестве из xRy и yRx следует x=y. <u>Заданное отношение не является антисимметричным</u>, так как ему принадлежат пары (1,4) и (4,1), но $1\neq4$.

Отношение R, заданное на множестве M называется антирефлексивным, если для любого $x\in M$ xRx ложно. <u>Заданное отношение антирефлексивно</u>, так как (уже было показано) нет пар (2,2) и (3,3).

Отношение R, заданное на множестве M называется транзитивным, если на этом множестве из xRy и yRz следует xRz. <u>Заданное отношение является транзитивным</u>, так как для любых двух пар (a,b) и (b,c) следует, что $(a,c)\in R$, где а, в, с $\in M$.

Областью определения отношения R называется множество $\delta_R=\{x|\ \exists(y)\ xRy\}$. Следовательно, областью определения R является двухэлементное множество {1, 4}.

Областью значений отношения R называется множество $\rho_R=\{y|\exists(x)\ xRy\}$. Следовательно, областью значений является все множество M={1, 2, 3, 4}.

Обратным отношением для R называется отношение $R^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$.

Обратное отношение R^{-1}={(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (1,4), (2,4), (3,4), (4,4)}.

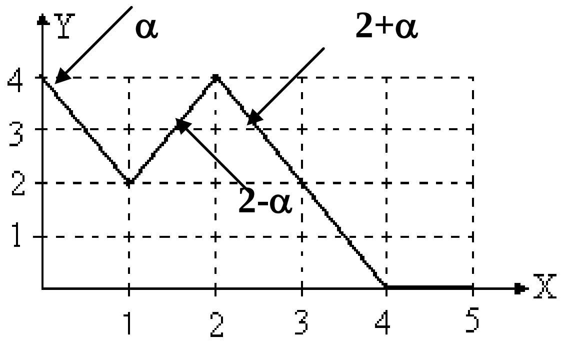
Пересечение R и R^{-1} равно $R\cap R^{-1}$={(1,1), (4,1), (1,4), (4,4)}.

Объединение R и R^{-1} равно $R\cup R^{-1}$={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (2,1), (3,1)}.

Пример 16. График функции f(x) (см. рис. 1.2) представляет собой ломанную, звенья которой параллельны координатной оси, либо биссектрисам координатных углов. Координаты каждой вершины ломанной являются целыми числами. Функция f(x) определяет отношение R_f на множестве X=[0, 5]: $xR_fy\leftrightarrow f(x)=f(y)$, т.е. x находится в отношении R_f с y тогда и только тогда, когда f(x)=f(y).

Доказать, что R_f – эквивалентность на X. Перечислить все классы эквивалентности.

Рис. 1.2



Решение.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение ρ на множестве X называется отношением эквивалентности на множестве X. Классом эквивалентности, порожденным элементом x, называется подмножество множества X, состоящее из тех элементов $y \in X$, для которых $x\rho y$ и обозначается [x]. $[x]=\{y|\ y \in X \text{ и } x\rho y\}$.

Сначала докажем, что отношение R_f есть отношение эквивалентности. Действительно, рефлексивность xR_fy, очевидна, так как f(x)=f(y). Симметричность: пусть xR_fy т.е. f(x)=f(y), но тогда f(y)=f(x) и, следовательно, yR_fx. Транзитивность: если f(x)=f(y), а f(y)=f(z), то f(x)=f(z) и, следовательно, xR_fy и yR_fz влечет xR_fz.

Классы эквивалентности: $\{\alpha, 2-\alpha, 2+\alpha\}$, [4, 5], {0,2}, {1,3}, $\{3+\alpha\}$,
где $\alpha \in (0,1)$.

Задачи для самостоятельного решения

№ 1.41. Какое множество имеет большую мощность: а) множество натуральных чисел или множество четных чисел? б) множество четных чисел или множество простых чисел?

№ 1.42 Установить эквивалентность между множеством натуральных чисел N и множеством $M;\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \cdots\}$.

№ 1.43 Показать, что мощность всякого произвольного множества больше или равна мощности всех чисел натурального ряда.

№ 1.44. Установить взаимно-однозначное соответствие между множествами всех рациональных чисел на отрезках (0; 1) и $(0; \infty)$.

№ 1.45. Установить эквивалентность между множеством всех положительных рациональных чисел и множеством натуральных чисел.

№ 1.46. Задана система числовых множеств:

$$A_1 = \{x \mid x = n, \quad n \in N\};$$

$$A_2 = \{x \mid x = 2n, \quad n \in N\};$$

………………………..

$$A_k = \{x \mid x = kn, \quad n \in N\}.$$

Определить мощность множества $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

№ 1.47. Является ли множество {(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)} бинарным отношением. Почему?

№ 1.48. Выписать элементы множества $\{0, 1, 2\}\times\{a,b\}$. Найти область определения и область значений этого отношения, построить его график.

№ 1.49. Показать на примере, что операция образования декартового произведения не является ни коммутативной, ни ассоциативной.

№ 1.50. Доказать, что декартово произведение дистрибутивно относительно операции объединения, т.е. что для любых множеств A, B и C $(A \cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$.

№ 1.51. Пусть β - отношение “есть брат”, φ - отношение “есть сестра”. Описать отношения $\beta \cup \varphi$; $\beta \cap \varphi$; $\beta \setminus \varphi$.

№ 1.52. Является ли отношение “быть рядом” транзитивным?

№ 1.53. Задано бинарное отношение на множестве M={1,2,3,4}. Является ли оно рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным? Почему? Найдите область определения δ_R, область значений ρ_R, обратное отношение R^{-1}, пересечение и объединение R и R^{-1}.

а) R={(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,3), (4,1), (4,4)};
б) R={(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4)};
в) R={(1,1), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)};
г) R={(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,3), (3,3), (4,4)};
д) R={(1,1), (1,3), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)};
е) R={(1,1), (1,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4)};
ж) R={(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,4), (4,4)};
з) R={(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3), (4,3)};
и) R={(1,4), (2,3), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3)};
к) R={(2,1), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1)}.

№ 1.54 Найти область определения, область значений, построить график каждого из следующих отношений:

а) $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2 = y^2\}$;
б) $\{(x,y)\in R\times R \mid |x| + 2|y| = 1\}$;
в) $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ и } x > 0\}$;
г) $\{(x,y)\in R\times R \mid y > 0, \quad y \le x, \quad x + y < 1\}$;

д) $\{(x,y) \in R \times R \mid x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$;
е) $\{(x,y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

№ 1.55 Доказать, что если:
а) $A \subset B$ и $A \equiv A \cup C$, то $B \equiv B \cup C$;
б) $A \equiv B$ и $C \supset A$, $C \supset B$, то $C \setminus A \equiv C \setminus B$;
в) $A \setminus B \equiv B \setminus A$, то $A \equiv B$.

№ 1.56. Доказать, что множество всех окружностей (на плоскости), радиусы которых рациональны и центры которых имеют рациональные координаты, есть счетное множество.

№ 1.57. Доказать, что множество всех четырехугольников (на плоскости), вершины которых имеют целые координаты, есть счетное множество.

№ 1.58. Доказать, что множество всех точек плоскости, обе координаты которых есть двоичные дроби, есть счетное множество.

№ 1.59. На улице есть 30 домов, пронумерованных обычным способом: нечетные номера с одной стороны, а четные с другой стороны. Пусть h_n обозначает жителя, живущего в доме с номером n. Описать при помощи символов отношение N на множестве жителей такое, что h_i находится в отношении N к h_j, если они являются соседями.
Как будет выглядеть N, если улица является тупиком?

№ 1.60. Доказать, что любое отношение эквивалентности порождает такое разбиение, что для любых x, $y \in A$ или [x][1]=[y], или $[x] \cap [y] = \varnothing$.

№ 1.61. Если $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ – разбиение A и A конечное, показать, что

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

№ 1.62. Пусть A –произвольное множество и ρ - отношение на множестве $P(A) \times P(A)$, определенное следующим образом: $(P,Q)\,\rho\,(X,Y)$ тогда и только тогда, тогда $(P \Delta Q) \subseteq (X \Delta Y)$. Является ли ρ отношением порядка?

1.63. Докажите справедливость соотношения

[1] Запись [x] означает класс эквивалентности для $x \in A$.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

1.64. Проиллюстрируйте диаграммой Венна следующие разбиения множества I:

а) $\{A, \quad \overline{A}\}$;

б) $\{A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}\}$;

в) $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$.

1.65 Каковы свойства соответствия между множеством N натуральных чисел и множеством A степени числа 2:

$$G = \{(n, 2^{n-1}) \mid n \in N,\ 2^{n-1} \in A\} \subseteq N \times A\ ?$$

1.66 Является ли функция f(x)=2x, имеющая тип N→N, отображением, и если – да, то каким? Имеет ли функция f обратную функцию f^{-1}, и если – да , то является ли f^{-1} отображением?

1.67 Чему равна композиция функций f(x) и g(x), если:

а) f(x)=2x и g(x)= $\lg x$;

б) f(x)=x^3 и g(x)=$\sqrt{x}$;

в) f(x)=2^x и g(x)=x+1?

Каковы области определения функций и их композиций?

1.68 Найти композицию преобразований:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,2\,1 \end{bmatrix}, \qquad \beta = \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{bmatrix};$$

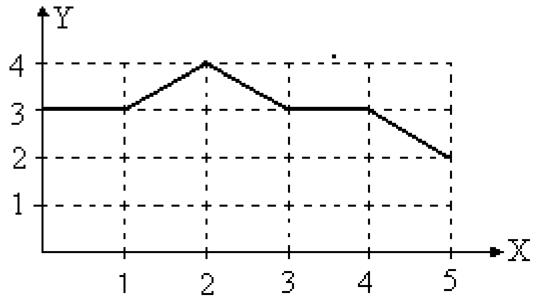
$$\alpha = \begin{bmatrix} a\ b\ c \\ c\ b\ c \end{bmatrix}, \qquad \beta = \begin{bmatrix} a\ b\ c \\ b\ b\ a \end{bmatrix};$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} a\ b\ c\ d \\ b\ d\ a\ c \end{bmatrix}, \qquad \beta = \begin{bmatrix} a\ b\ c\ d \\ c\ a\ d\ d \end{bmatrix}.$$

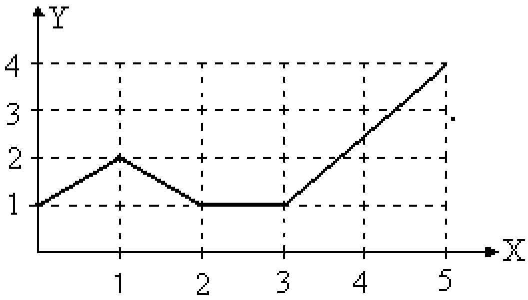
1.69 Пусть множества β(I), где I={a, b, c} A_3 определены следующим образом: β(I) – множество всех подмножеств (булеан) множества I={a, b, c}; A_3 – множество всех двоичных векторов длины 3, т.е. A_3=B×B×B, где B={0, 1}.

Показать, что между множествами β(I) и A_3 имеет место взаимно однозначное соответствие.

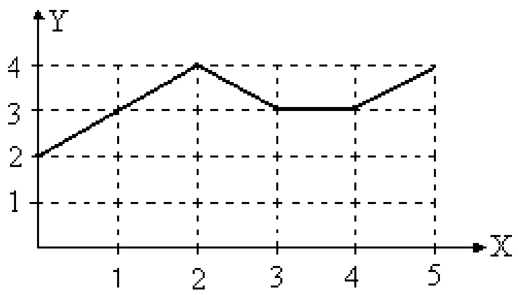
№ 1.70. График функции $f(x)$ представляет собой ломанную, звенья которой параллельны координатной оси, либо биссектрисам координатных углов. Координаты каждой вершины ломанной являются целыми числами. Функция $f(x)$ определяет отношение R_f на множестве $X=[0,\ 5]$. $xR_f y \leftrightarrow f(x)=f(y)$ (т.е. $x \in X$, $y \in X$ находится в отношении R_f с $y \in X$ тогда и только тогда, когда $f(x)=f(y)$. Докажите, что R_f –эквивалентность на X. Перечислите все классы эквивалентности.



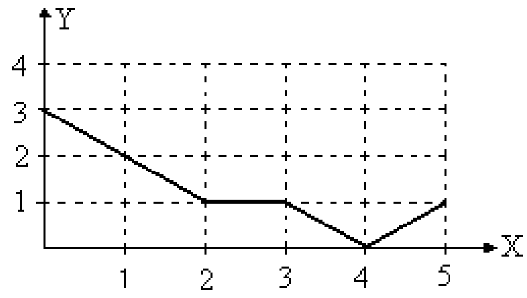
а)



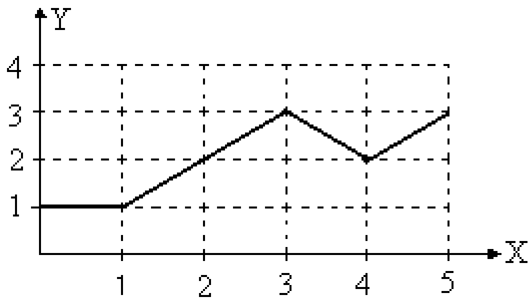
б)



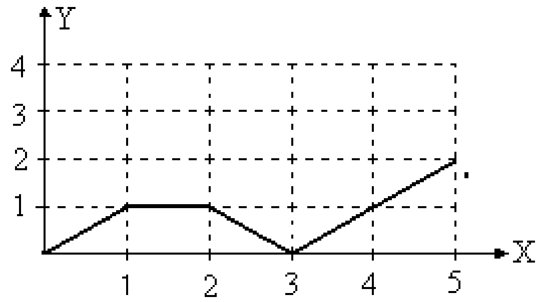
в)



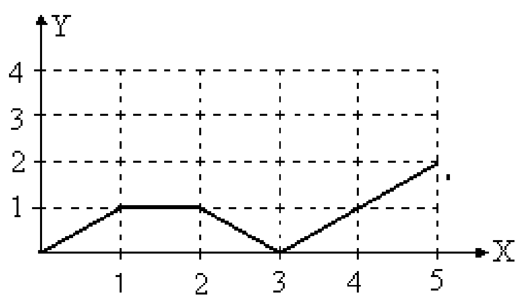
г)



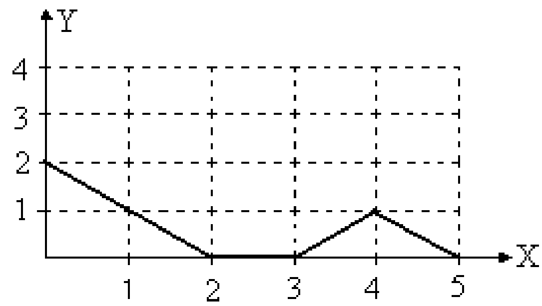
д)



е)



ж)



з)

2 Элементы теории графов

2.1 <u>Основные определения.</u>

Пусть X – множество вершин, V –множество ребер, соединяющие вершины. Граф G=(X,V) считается заданным, если дано множество его вершин X и способ отображения Г этого множества в самого себя.

Подграфом G_A графа G=(X, Г) называется граф, в который входит лишь часть вершин графа G, образующих множество A, вместе с дугами, соединяющими эти вершины:

$$G_A = (A, \Gamma_A),$$

где $$A \subseteq X, \quad \Gamma_A x = (\Gamma x) \cap A.$$

Частичным графом G_Δ по отношению к графу G=(X, Г) называется граф, содержащий только часть дуг графа G, т.е. определяемый условием:

$$G_\Delta = (X, \Delta), \text{ где } \Delta x \subseteq \Gamma x.$$

Важными понятиями в теории графов являются понятия пути, длины пути, контур

. Для описания графа используются матрицы смежности и матрицы инцидентности.

Пример 2.1 Построить граф G, заданный множеством вершин X={X_1, X_2, X_3, X_4} и их отображениями Г(X_1)={X_1, X_2}, Г(X_2)={X_3, X_4}, Г(X_3)={X_1, X_4}, Г(X_4)={X_1, X_2, X_3}.

Решение. Данный граф приведен на рис. 2.1

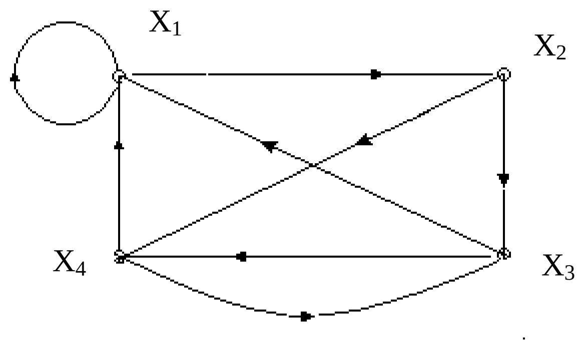
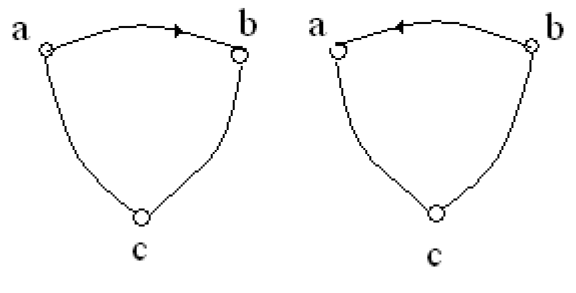


Рис. 2.1

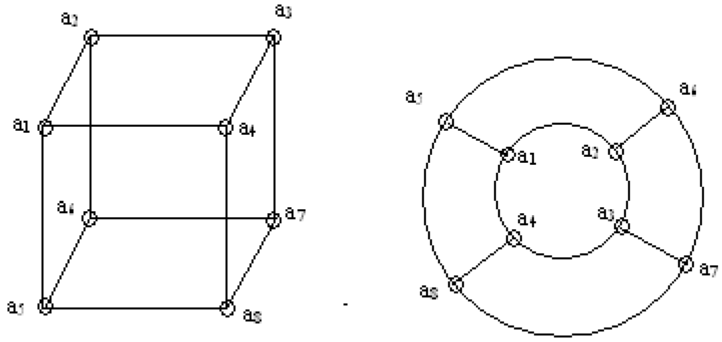
Два графа G_1 и G_2 изоморфны, если существует такое взаимно-однозначное соответствие между множествами их вершин X_1 и X_2, что вершины соединены ребрами в одном из графов в том и только том случае, когда соответствующие им вершины соединены в другом графе. Если ребра ориентированы, то их направления также должны соответствовать друг другу.

Пример 2.2 Изоморфны ли графы, изображенные на рис. 2.2 и 2.3?



A_1 A_2

Рис.2.2



B_1 B_2

Рис. 2.3

Решение. Графы A_1 и A_2 не изоморфны, хотя они и имеют одинаковое число вершин и ребер. Но в графе A_1 одно из ребер направлено от a к b, а в графе A_2 оно направлено в другую сторону. Графы B_1 и B_2 изоморфны, т.к. они имеют одно и то же число вершин и любые две вершины графа B_1 соединены ребром только тогда, когда соответствующие им вершины графа B_2 также соединены ребром.

Пример 2.3 Являются ли полными (без учета петель) графы A_1, B_1, изображенные на рис. 2.2 и 2.3?

Решение. Граф B_1 не является полным, т.к. не все пары его вершин соединены ребрами. Например, (a_1, a_6), (a_3, a_8) и другие. Граф A_1 не является полным, т.к. ребро (a, b) ориентировано только в одном направлении.

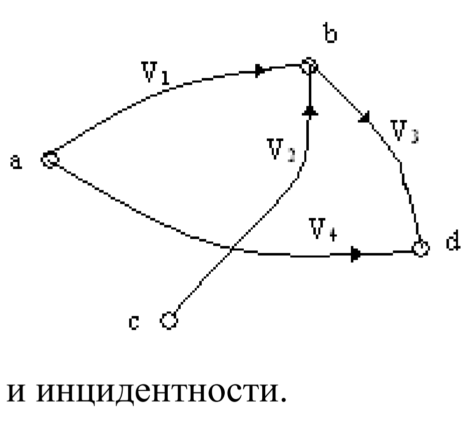


Рис. 2.4

Пример 2.4 Дан ориентировнный граф (рис. 2.4). Построить его матрицы смежности и инцидентности.

Решение. В соответствии с определением матрица смежности есть квадратная матрица с элементами множества вершин в качестве координат ее столбцов и строк.

Элемент матрицы в строке i и столбце j равен 1, если есть ребро от вершины i к вершине j, -1- если есть ребро к вершине i от вершины j и 0 – если вершины i и j не соединены. Матрица смежности приведена в таблице 2.1

Таблица 2.1

V / X	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	-1	0	-1	1
c	0	1	0	0
d	-1	-1	0	0

Таблица 2.2

V / X	V_1	V_2	V_3	V_4
a	1	0	0	1
b	-1	-1	1	0
c	0	1	0	0
d	0	0	-1	-1

В матрице инцидентности координатами строк являются элементы множества вершин, а координатами столбцов – элементы множества ребер. Элемент матрицы в строке i и столбце j равен 1, если ребро j исходит из вершины i, -1 – если ребро j входит в вершину i, 0 – если ребро j не инцидентно вершине i. Матрица инцидентности приведена в таблице 2.2.

Пример 2.5 На рис. 2.5. задан граф G. Построить матрицу смежности и выяснить, сколько путей длины три существует в графе G.

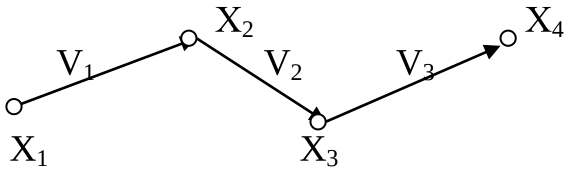


Рис. 2.5

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Элемент $a_{14}^{(3)} = 1$, следовательно, в данном графе существует единственный путь длиной три. Это путь из вершины X_1 в вершину X_4: $X_1 \xrightarrow{V_1} X_2 \xrightarrow{V_2} X_3 \xrightarrow{V_3} X_4$.

Все элементы матрицы A^4 равны нулю, следовательно, в графе отсутствуют пути длиной четыре.

Задачи для самостоятельного решения

№ 2.1 Показать, что два графа на рис. 2.6 изоморфны.

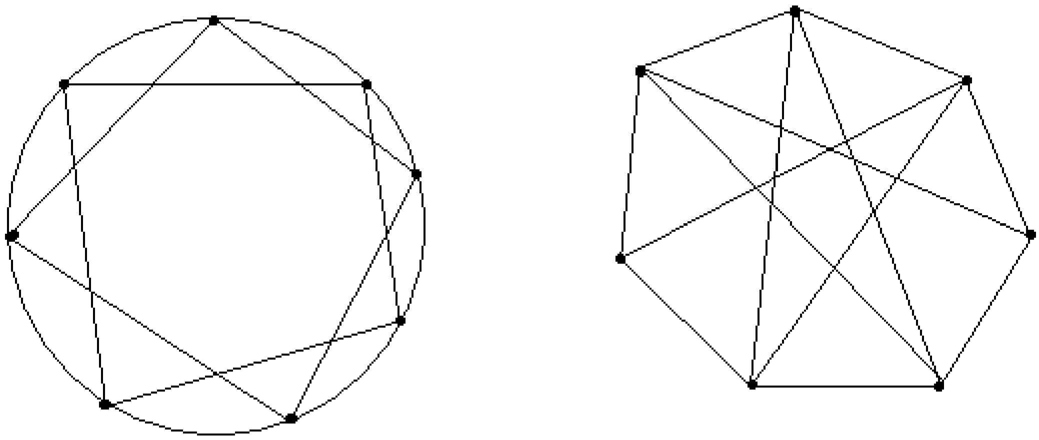
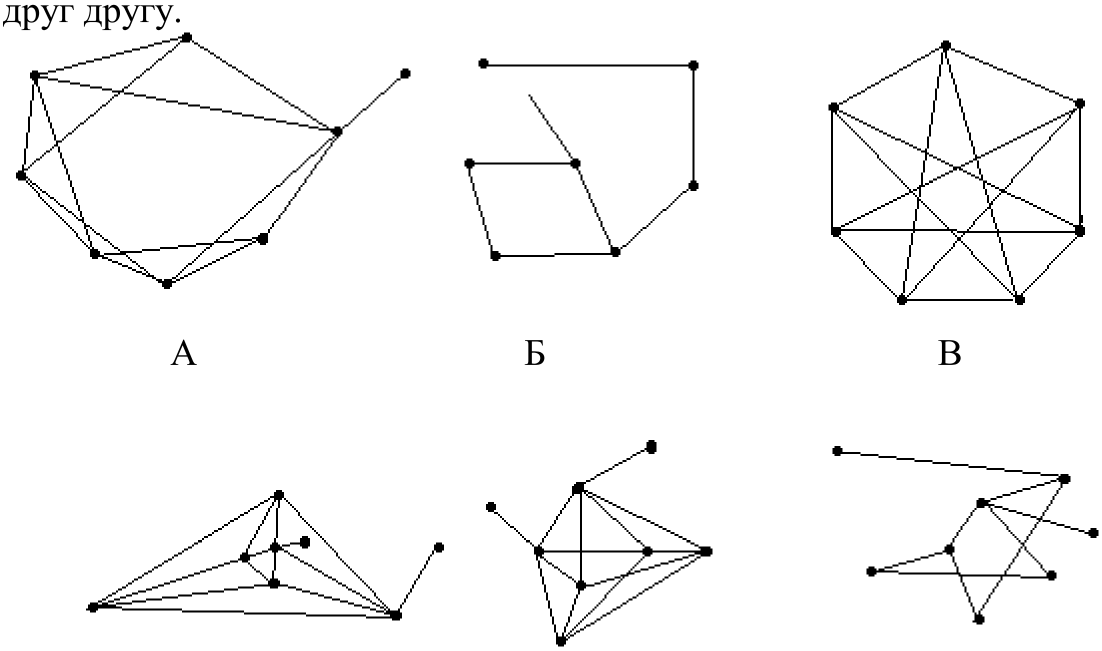


Рис. 2.6

№ 2.2 «Три дома и три колодца». Три поссорившихся соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к колодцу?

№ 2.3 Найти степени и числа вершин для графов пяти правильных многогранников.

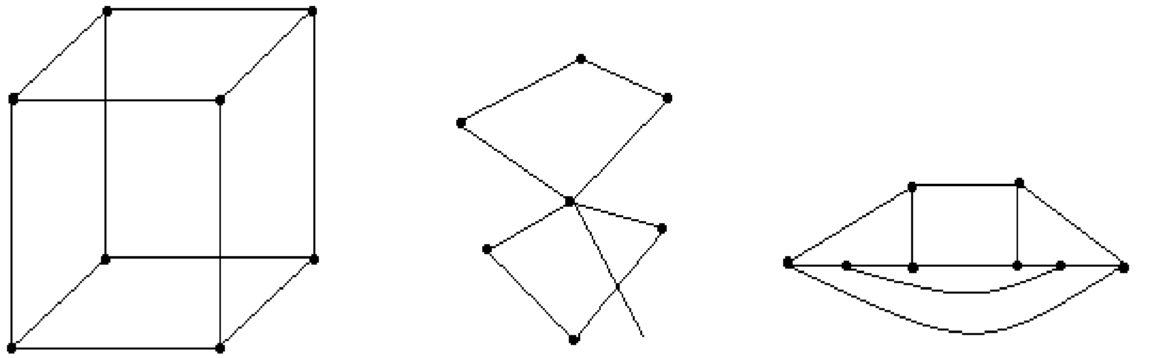
№ 2.4 Для графов, изображенных на рис. 2.7, указать пары, изоморфные друг другу.



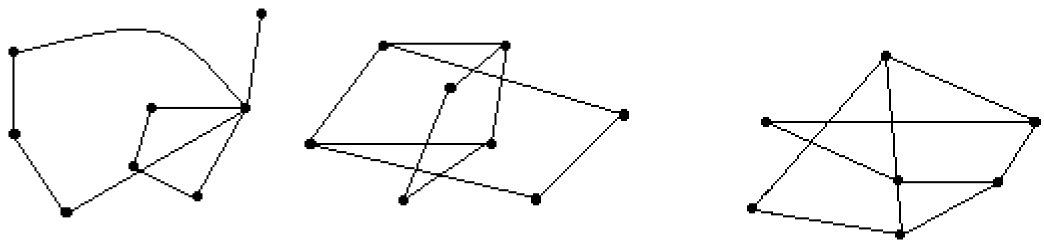
А Б В

Г Д Е

Ж З И



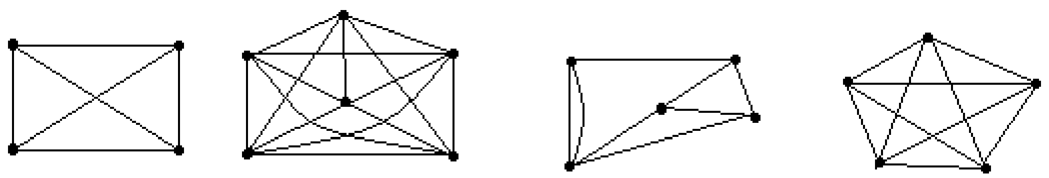
Ж З И



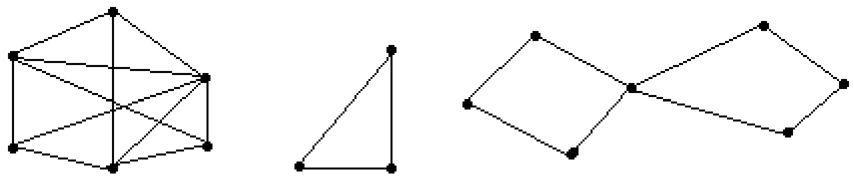
К Л М

Рис.2.7

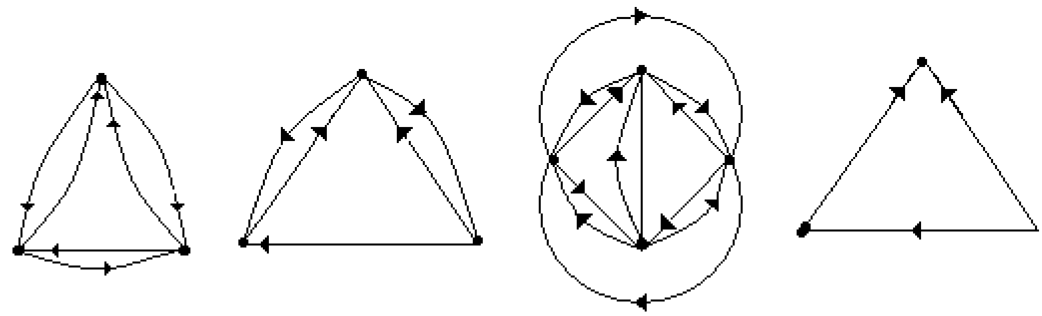
№ 2.5 Среди графов, указанных на рис. 2.8, выделить полные графы (без учета петель).



А Б В Г



Д Е Ж



И К Л М

Рис. 2.8

№ 2.6 Дан граф G (Рис. 2.9). Указать, какие из графов, изображенных на рис. 2.9б, являются частями графа G и какие – подграфами.

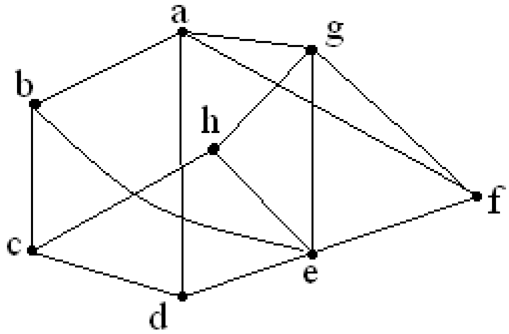
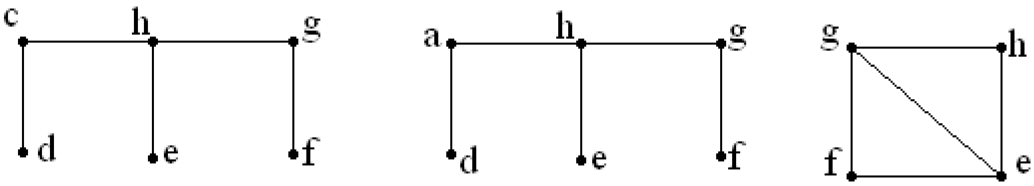
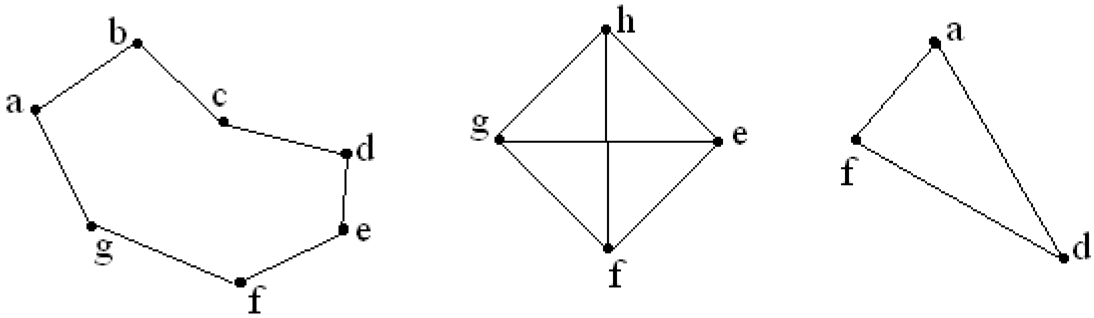


Рис. 2.9



А Б В



Г Д Е

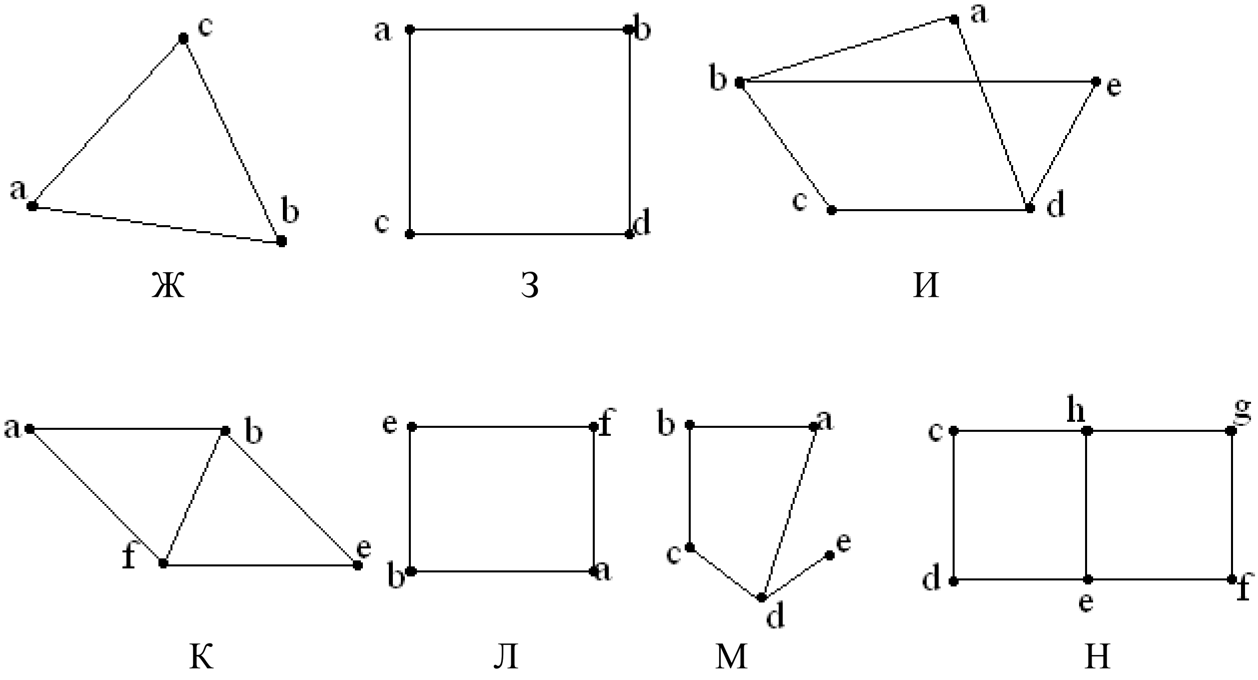


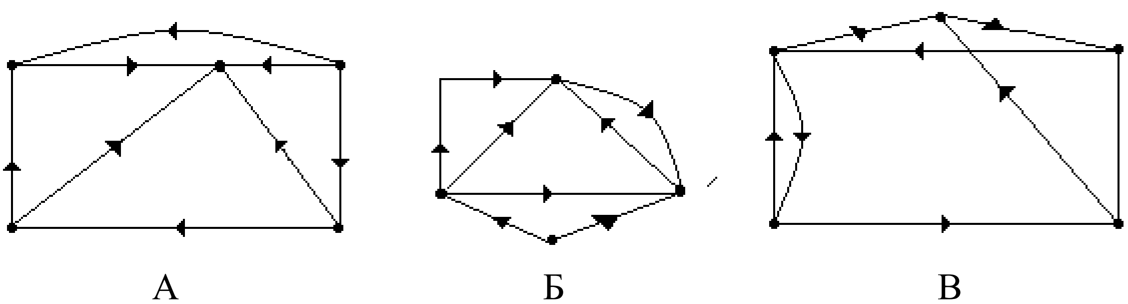
Рис. 2.9б.

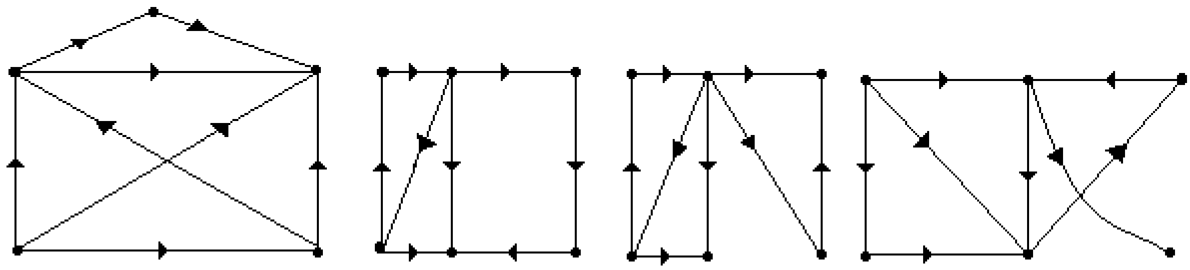
№ 2.8 Какие из графов, приведенных на рис.2.8 и 2.9, являются плоскими?

№ 2.9. Составить матрицы смежности и инцидентности для правильных многогранников.

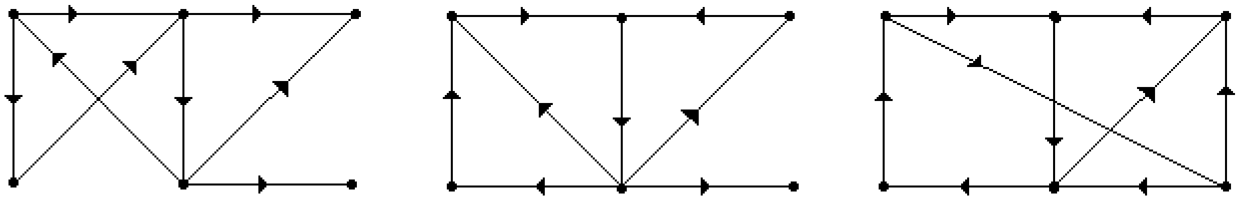
№ 2.10. Построить матрицы смежности графов, изображенных на рис. 2.9.

№ 2.11 Для заданного на рис. 2.10 (а÷к) графа построить: матрицу смежности, матрицу инциденции, матрицу достижимостей. Найти число внутренней устойчивости. Найти число внешней устойчивости.





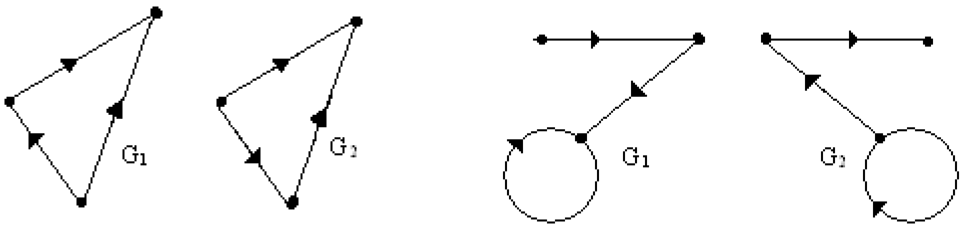
Г Д Е Ж



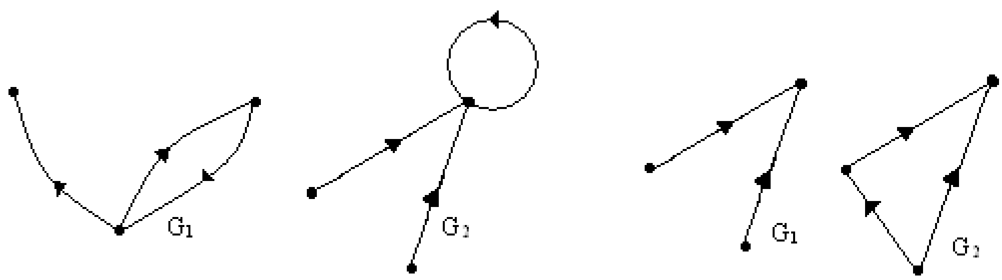
З И К

Рис. 2.10.

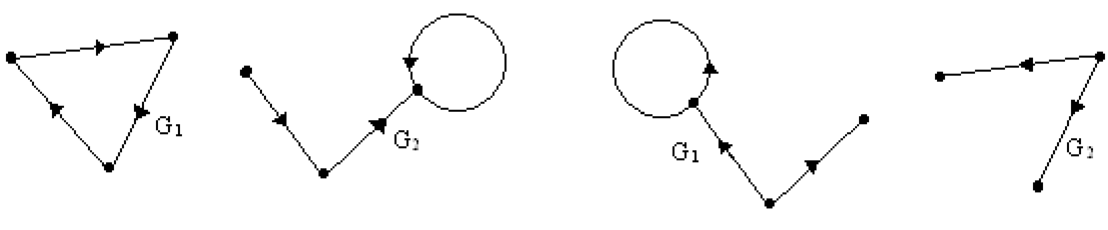
№ 2.12. Для приведенных на рис. 2.11. графов G_1 и G_2 найти $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \times G_2$.



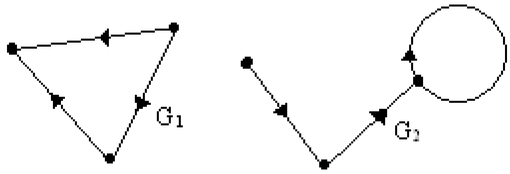
А Б



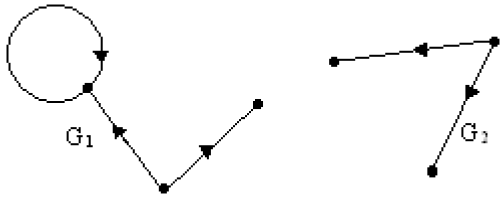
В Г



Д Е



Ж



З

Рис. 2.11

№ 2.13. Построить графы, матрицы смежности которых указаны:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ 2.14. Построить графы, матрицы инцидентности которых указаны:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad M_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

№ 2.15 Груз доставляется из пункта X_0 в пункт X_7 через перевалочные пункты $X_0 \ldots X_7$ (Рис.2.12). Расстояния между пунктами X_iX_j указаны на соответствующем графе. Найти путь минимальной длины между X_0 и X_7 и его длину.

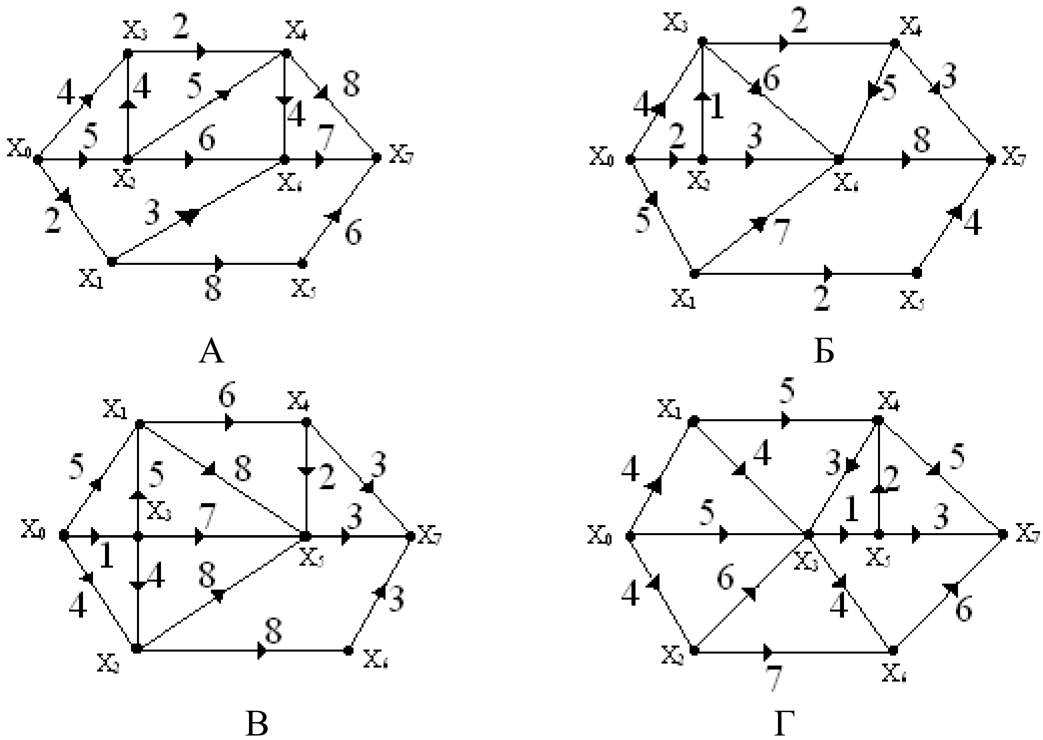


Рис. 2.12

№ 2.16 Задан сетевой граф проекта (Рис.2.12). Найти критический путь и минимальное время проекта

Литература

1. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. Пер. с англ., М., Мир, 1992 г.
2. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. М., Энергоатомиздат, 1989 г.
3. Ф.А. Новиков. Дискретная математика для программистов. Санкт-Петербург, Питер, 2001 г.